

Evaluation de la méthode de collocation pour l'homogénéisation en viscoélasticité linéaire

A. Rekik, R. Brenner

Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux,
UPR 9001, Université Paris Nord, Villetaneuse

18^e Congrès Français de Mécanique



① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Comportement viscoélastique linéaire

- Représentation fonctionnelle :

$$\sigma(t) = \mathfrak{C} \left[\begin{array}{c} t \\ \varepsilon(u) \\ 0 \end{array} \right]$$

la contrainte σ au temps t dépend de toutes les valeurs de la déformation ε sur l'intervalle $[0; t]$

⇒ Comportement héréditaire

- \mathfrak{C} fonctionnelle linéaire ⇒ Principe de superposition de Boltzmann
- Représentation intégrale :

$$\sigma(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) d\varepsilon(\tau)$$

$\mathbf{C}(t)$: tenseur des modules viscoélastiques (fonction de relaxation)

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Démarche d'homogénéisation

- Matériau viscoélastique hétérogène :

Comportement local $\mathbf{C}_i(t) \xrightarrow{?}$ Comportement effectif $\tilde{\mathbf{C}}(t)$

- Approche classique :

- Transformation LC \Rightarrow Comportement élastique symbolique $\hat{\mathbf{C}}_i(p)$
- Homogénéisation linéaire symbolique $\Rightarrow \tilde{\hat{\mathbf{C}}}(p)$
- Inversion du comportement symbolique $\Rightarrow \tilde{\mathbf{C}}(t)$.

- Calcul des transformées inverses :

- Fonctions analytiques : calcul de l'intégrale de Bromwich (cas rares ...)
- Cas général : mise en oeuvre de méthodes numériques

\Rightarrow Evaluation d'une méthode d'inversion : la collocation.

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Développement en série de Dirichlet

- Forme générale de la fonction de relaxation :

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{G}(\tau) e^{-t/\tau} d\tau$$

avec $\mathbf{G}(t)$ le **spectre de relaxation** du matériau.

- **Approximation du spectre** :

Le spectre caractéristique est remplacé par un ensemble de n *raies discrètes* aux temps de relaxation τ_r et d'intensité \mathbf{G}_r

$$\mathbf{C}^*(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{G}_r e^{-t/\tau_r},$$

Comment représenter « au mieux » $\mathbf{C}(t)$ par $\mathbf{C}^*(t)$?

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

- Minimisation de l'erreur quadratique E :

$$\min_{\tau_r, \mathbf{G}_r} E = \min_{\tau_r, \mathbf{G}_r} \int_0^{\infty} [\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}^*(t)]^2 dt$$

- $\partial E / \partial \mathbf{G}_r = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{C}}(p_r) = \hat{\mathbf{C}}^*(p_r)$ avec $p_r = 1/\tau_r, \forall r = 1, \dots, n$
- $\partial E / \partial \tau_r = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}(p)}{dp} \right|_{p_r} = \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r}$ avec $p_r = 1/\tau_r, \forall r = 1, \dots, n$

min $E \Leftrightarrow$ Egalité des TLC et de leurs dérivées en n points p_r

- $\mathbf{C}^*(t) \xrightarrow{\text{TLC}} \hat{\mathbf{C}}^*(p)$, soit

$$\hat{\mathbf{C}}^*(p_r) = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \frac{1}{p_i + p_r} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r} = - \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \frac{1}{(p_i + p_r)^2}$$

Mise en oeuvre (2/2)

- Collocation classique (Schapery,1962) :
 - Choix préalable des points de collocation p_r
 - Les intensités \mathbf{G}_r sont solutions d'un système linéaire de n équations
 - **Inconvénient** : La décroissance monotone de la fonction de relaxation n'est pas assurée.
- Cas général :
 - Résolution d'un système non linéaire de $2n$ équations
 - **Difficulté** : Pas de solution unique
 - Mis sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{G}_r, \tau_r} \left[\sum_{r=1}^n \left(\hat{\mathbf{C}}(p_r) - \hat{\mathbf{C}}^*(p_r) \right)^2 + \left(\left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}(p)}{dp} \right|_{p_r} - \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r} \right)^2 \right] \\ \text{avec } \mathbf{G}_r \geq 0, \quad \tau_{\min} \leq \tau_r \leq \tau_{\max}, \quad \sum_{r=1}^n \mathbf{G}_r - \tilde{\mathbf{C}}^e = 0. \end{array} \right.$$

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Matériau biphasé incompressible

- Mélange de deux phases isotropes maxwelliennes :

$$\mathbf{C}_i(t) = 2\mu_i^e e^{-t/\tau_i} \mathbf{K} + \infty \mathbf{J}$$

- μ_i^e et τ_i : module de cisaillement élastique et temps de relaxation de la phase i .
- Loi de comportement élastique symbolique :

$$\hat{\sigma}'(p) = 2\hat{\mu}_i \hat{\varepsilon}'(p) \quad \text{avec} \quad \hat{\mu}_i(p) = \mu_i^e \frac{p}{p + 1/\tau_i}$$

- Comparaison de la réponse harmonique:

- Module complexe $\tilde{G}(\omega) = \hat{\mu}(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$
- Diagramme de Cole-Cole : $G'' = f(G')$

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Estimation de Mori-Tanaka

- Microstructure particulière : matrice m et particules p
- Le spectre de relaxation est constitué de **deux raies discrètes** (comportements maxwelliens)

$$\tilde{\mu}^{MT}(t) = \alpha e^{-t/\tau_m} + \beta e^{-t/\tau'}$$

α , β et τ' sont des fonctions des propriétés locales et des fractions volumiques des constituants.

- **Application** :
 - Fraction volumique de particules : $f_p = 0.2$
 - Elasticité homogène : $\mu_p^e = \mu_m^e$
 - Contraste sur les temps de relaxation des deux phases : $c_\tau = 50$
 - Deux cas :

① inclusion plus visqueuse ($\tau_p > \tau_m$)

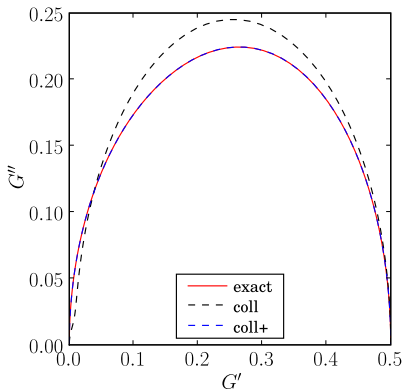


② matrice plus visqueuse ($\tau_m > \tau_p$)



Cas 1 : $\tau_p > \tau_m$

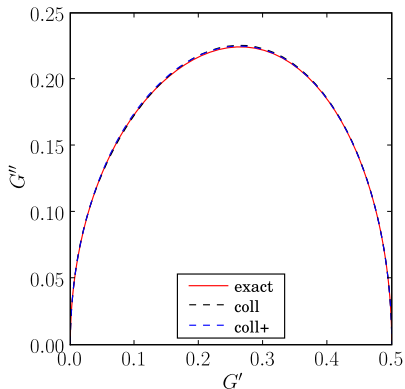
$$n_{\text{coll.}} = 2, \quad \tau \in [\tau_m; \tau_p]$$



- Initialisation : résultat de la collocation classique.
- Collocation optimisée \implies **Résultat exact.**

Cas 1 : $\tau_p > \tau_m$

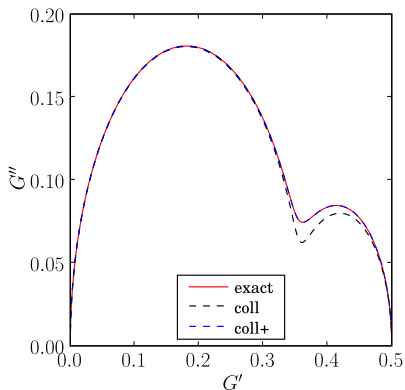
$$n_{\text{coll.}} = 6, \quad \tau \in [\tau_m; \tau_p]$$



- Bon accord de la collocation classique à partir de $n_{\text{coll.}} = 6$

Cas 2 : $\tau_m > \tau_p$

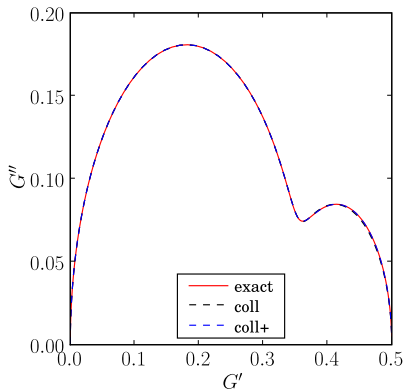
$$n_{\text{coll.}} = 2, \quad \tau \in [\tau_p; \tau_m]$$



- Initialisation : résultat de la collocation classique.
- Collocation optimisée \implies **Résultat exact.**

Cas 2 : $\tau_m > \tau_p$

$$n_{\text{coll.}} = 7, \quad \tau \in [\tau_p; \tau_m]$$



- Bon accord de la collocation classique à partir de $n_{\text{coll.}} = 7$

① Contexte

Rappels de viscoélasticité linéaire

Problématique pour l'homogénéisation

② Approximation du comportement viscoélastique

Développement en série

Possibilités d'optimisation et mise en oeuvre

③ Confrontation à des solutions analytiques

Problème viscoélastique hétérogène

Cas d'un spectre discret

Cas d'un spectre continu

Estimation autocohérente

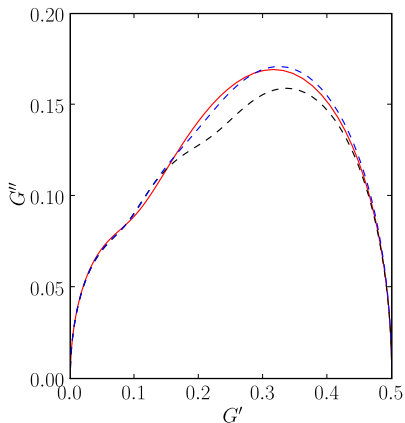
- Microstructure granulaire
- Le spectre de relaxation est constitué de **deux raies discrètes** et d'une **partie continue** (Beurthey et Zaoui, 2000)

$$\tilde{\mu}^{AC}(t) = \alpha_1 e^{(-t/\tau_1)} + \alpha_2 e^{(-t/\tau_2)} + k \frac{\tau_1 \tau_2}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{(\tau - \theta_1)(\theta_2 - \tau)}}{\tau(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} e^{(-t/\tau)} d\tau$$

α_1 , α_2 , θ_1 , θ_2 et k sont des fonctions des propriétés locales et des fractions volumiques des constituants.

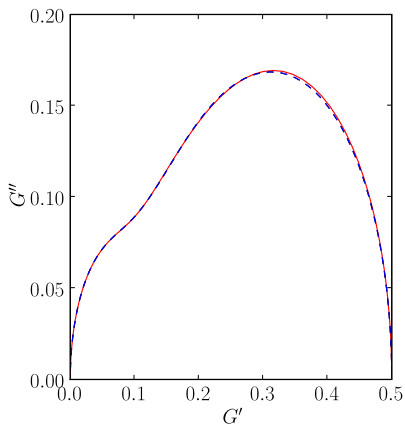
- **Application :**
 - Fraction volumique de particules : $f_1 = f_2 = 0.5$
 - Elasticité homogène : $\mu_1^e = \mu_2^e$
 - Contraste sur les temps de relaxation des deux phases : $c_\tau = 50$

$$n_{\text{coll.}} = 3, \quad \tau \in [\tau_1; \tau_2]$$



- Bon accord de la collocation optimisée dès $n_{\text{coll.}} = 3$
- N. B : Pas de résultat exact.

$$n_{\text{coll.}} = 6, \quad \tau \in [\tau_1; \tau_2]$$



- Réponses équivalentes à partir de 6 points de collocation.

- Inversion numérique des TLC par collocation \Rightarrow problème de minimisation sous contraintes
- L'optimisation par rapport à τ_r et \mathbf{G}_r réduit le nombre de points de collocation.
- Collocation optimisée \Rightarrow résultat exact dans le cas d'un spectre discret.
- En général, moins de 10 points de collocation suffisent.

Autre application :

- Identification de modèles rhéologiques sur des réponses expérimentales.